OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a V-a

Problema 1. Un număr natural se numeşte *util* dacă este pătrat perfect, cub perfect sau dacă este egal cu produsul dintre un număr care este pătrat perfect şi un număr care este cub perfect (de exemplu numerele $4=2^2$, $27=3^3$ şi $72=2^3\cdot 3^2$ sunt numere *utile*).

a) Găseşte două numere *utile* cu proprietatea că diferenţa lor este egală cu 1.
b) Găseşte două numere utile cu proprietatea că diferenţa lor este egală cu 3.
c) Demonstrează că oricare ar fi numărul *util* a există două numere *utile* b şi c cu proprietatea $b-c=a$.

Problema 2. Un număr de 2465 de elevi din clasa a V - a din judeţul Călăraşi au completat un chestionar în care trebuiau să indice, în perspectiva evaluării naţionale din clasa a VI - a, testul la care au nevoie de pregătire suplimentară, Matematică şi Ştiinţe ale naturii sau/şi Limbă şi comunicare - Limba străină**.** La centralizarea rezultatelor s-a constatat că pentru Matematică şi Ştiinţe ale naturii au fost 1528 de opţiuni, pentru Limbă şi comunicare - Limba străină 1305 şi 567 dintre elevii chestionaţi nu au indicat niciun test. Determină numărul elevilor care au indicat că au nevoie de pregătire la ambele teste.

Problema 3. Determină mulţimea A care este inclusă în $\mathbb{N}^*$ şi îndeplineşte simultan condiţiile:
1° elementele mulţimii A sunt numere mai mici decât 13;
2° dacă $x\in A$, atunci $x+5\in A$ sau $x:3\in A$. ($x:3$ reprezintă „x împărţit la 3”)

Problema 4. Dacă un număr natural îndeplineşte simultan condiţiile:
1° nu conţine cifre egale;
2° prima şi ultima cifră este număr prim sau pătrat perfect;
3° numărul format din oricare două cifre consecutive este număr prim sau pătrat perfect.
atunci o să numim numărul *olimpic*. De exemplu numerele 79 (7, 79 sunt numere prime, $9=3^2$), 413 ($4=2^2$, 41, 13, 3 sunt numere prime), 2531 (2 este număr prim, $25=5^2$, 53, 31 sunt numere prime, $1=1^2$), 37164 (3, 37, 71 sunt numere prime, 16, 64, 4 sunt pătrate perfecte) sunt numere *olimpice*.

a) Găseşte cel mai mic număr *olimpic* de două cifre.
b) Găseşte cel mai mare număr *olimpic* de cinci cifre.
c) Demonstrează că cel mai mare număr *olimpic* are opt cifre.

SUCCES!

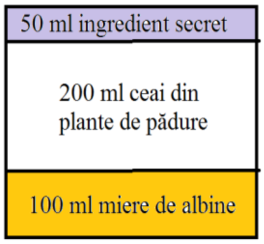
Problemele au fost propuse de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este: Problema 1. a) 2 puncte; **b)** 2 puncte; **c)** 3 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4. a)** 2 puncte; **b)** 2 puncte; **b)** 3 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a VI-a

Problema 1. Ana își pregătește în fiecare dimineață o băutură miraculoasă în felul următor: toarnă într-un vas gradat, care are capacitatea de 350 ml, 100 ml de miere de albine, după care toarnă 200 ml de ceai din plante de pădure, amestecă bine, apoi completează cu 50 ml dintr-un lichid care este ingredientul secret și amestecă din nou (*vezi desenul alăturat*). În această dimineață nu a fost atentă când a adăugat ceaiul și a turnat până s-a umplut vasul, dar fără să verse pe jos. Bună matematiciană, a calculat rapid ce cantitate trebuie să verse din amestec și care este cantitatea de miere care trebuie adăugată pentru ca, la final, după ce toarnă 50 ml din ingredientul secret să obțină băutura după rețeta stabilită, singura care are efect.



a) Dacă băutura miraculoasă conține $p\%$ ingredient secret, arată că $14,2 < p < 14,3$.

b) Determină cantitatea de amestec care trebuie vărsată.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Problema 2. Într-o urnă sunt 20 de bile numerotate de la 1 la 20. Cristina extrage două bile și le dă câte o bilă prietenelor ei, Delia și Maria.

a) Ce număr ar trebui să primească Delia pentru ca acesta să aibă un singur divizor?

b) Ce număr ar trebui să primească Maria pentru ca acesta să aibă cinci divizori?

c) Cristina le spune celor două fete: ”Numărul Deliei este mai mic decât numărul Mariei, dar ambele numere au același număr de divizori.”. După ce se uită ce scrie pe bila ei Delia spune: ”Nu știu numărul Mariei.”, apoi Maria spune: ”Cu informațiile date de Cristina, nu am știut numărul Deliei, dar acum îl știu.”. Care sunt numerele scrise pe bilele primite de Cristina și Delia?

Adriana Constantin, Călărași

Problema 3. Se consideră numărul natural 2016.

a) Găsește două numere prime p și q cu proprietate $2^p - 2^q = 2016$.

b) Demonstrați că orice mulțime care conține 2016 numere naturale, admite o submulțime care are suma elementelor divizibilă cu 2016.

Florin Marcu, Călărași

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC ascuțit unghic și punctele D, E astfel încât $D \in (BC)$, $E \in (DC)$, semidreapta $(AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAE$ și semidreapta $(AE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAC$. Dacă F este simetricul punctului D față dreapta AB și G este simetricul punctului E față dreapta AC, atunci demonstrați că $[EF] \equiv [DG]$.

Viorica Stoianovici, Călărași

SUCCES!

Problemele au fost selectate și prelucrate de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este : Problema 1. a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 2. a)** 2 puncte; **b)** 2 puncte; **c)** 3 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a VII-a

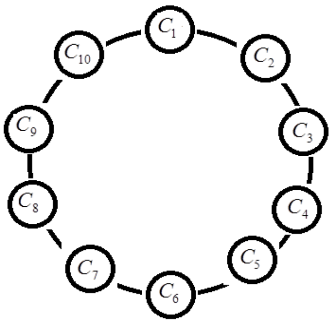
Problema 1. Fie a și b numere raționale pozitive. Arătați că:

a) dacă $a\sqrt{7\cdot 2016}+b\in\mathbb{Q}$, atunci $a=b=0$;

b) $a\sqrt{2017-2\sqrt{2016}}-b\sqrt{2020-4\sqrt{2016}}\in\mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $a=b$;

Diana Stanciu, Ulmeni

Problema 2. Fiecare din numerele $1, 2, 3, \ldots, 10$ trebuie scris în unul din cercurile numite $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{10}$ (*vezi desenul alăturat*) astfel încât oricare ar fi cinci cercuri consecutive, suma numerelor scrise în aceste cercuri să fie un număr divizibil cu 5. Câte variante diferite de scriere a numerelor în cercuri există? (Două variante sunt diferite dacă în unul dintre cercurile $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{10}$ sunt scrise numere diferite)



Gabriela Ruse și Gheorghe Stoianovici, Călărași

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E astfel încât $D\in(AC)$, $E\in(AB)$, astfel încât semidreapta $(BD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ iar semidreapta $(CE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$. Dacă paralela prin punctul D la dreapta CE intersectează dreapta AB în punctul F, paralela prin punctul E la dreapta BD intersectează dreapta AC în punctul G, $BD\cap CE=\{N\}$ și $DF\cap EG=\{P\}$, atunci:

a) Demonstrați că $FG\,||\,DE$ dacă și numai dacă $AB=AC$.

b) Dacă $AB=AC$, atunci demonstrați că patrulaterul $PDNE$ este romb.

c) Există un triunghi ABC astfel încât, în ipotezele date, rombul $PDNE$ este pătrat? (justifică răspunsul)

Adrian Olaru, Călărași

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC și punctul $D\in(BC)$, astfel încât semidreapta $(AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Dacă paralela prin punctul B la dreapta AD intersectează paralela prin punctul A la dreapta BC în punctul M, $N\in(BC\setminus(BC)$ este punctul cu proprietatea $[BD]\equiv[CN]$ și punctul P este simetricul punctului A față de punctul D, atunci:

a) demonstrați că patrulaterul $AMCN$ este paralelogram;

b) $AD=BC \Leftrightarrow CM\perp NP$.

Stelică Pană, Chirnogi și Sorin Furtună, Călărași

SUCCES!

Problemele au fost selectate și prelucrate de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este : Problema 1. a) 4 puncte; b) 3 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 2 puncte; c) 2 puncte; **Problema 4.** a) 2 puncte; b) 5 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a VIII-a

Problema 1. Se consideră ecuațiile:

1° $\left||x-2016|-|x-1|\right|=2015;$

2° $\left[\dfrac{x}{9}\right]=\left[\dfrac{x}{10}\right].$

unde cu $|x|$ și cu $[x]$ s-au notat modulul și, respectiv partea întreagă a numărului real x.

a) Arătați că $x=0$ este soluție pentru ecuația 1°.

b) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația 1°.

c) Câte numere naturale sunt soluții pentru ecuația 2° ?

Marin Neață și Eugen Predoiu, Călărași

Problema 2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, să se demonstreze că:

a) Dacă $ab+bc+ca=1$ atunci $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)=\left(abc-a-b-c\right)^2$.

b) Dacă a și b sunt numere pozitive atunci $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

c) Dacă numerele a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci $\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{a}+1\right)\left(\dfrac{c}{b}-\dfrac{a}{b}+1\right)\left(\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}+1\right)\leq 1.$

Cristina Bornea, Călărași

Problema 3. Se consideră tetraedrul regulat $VABC$. Dacă $VA=4a$ cm, $a\in(0,+\infty)$, $VO\perp(ABC)$; $O\in(ABC)$, M, N și P sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și, respectiv $[VO]$, atunci:

a) calculați volumul tetraedrului regulat $VABC$;

b) determinați lungimea proiecției segmentului $[VM]$ pe planul (ANP).

Stelică Pană, Chirnogi și Sorin Furtună, Călărași

Problema 4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ și un punct M care aparține interiorului triunghiului BCD. Paralele duse prin M la dreptele AB, AC și AD intersectează planele (ACD), (ABD) și, respectiv (ABC) în punctele A', B' și, respectiv C'. Dacă $AA'\cap(CD)=\{P\}$, $AB'\cap(BD)=\{Q\}$, $AC'\cap(BC)=\{M\}$ și $(BCD)\parallel(A'B'C')$, atunci:

a) demonstrați că $\dfrac{A'P}{AP}=\dfrac{B'Q}{AQ}=\dfrac{C'N}{AN}$;

b) demonstrați că M este centrul de greutate al triunghiului (BCD).

(G.M.)

SUCCES!

Problemele au fost selectate și prelucrate de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este: Problema 1. a) 1 punct; **b)** 3 puncte; **b)** 3 puncte; **Problema 2. a)** 2 puncte; **b)** 1 punct; **b)** 4 puncte; **Problema 3. a)** 3 puncte; **b)** 4 puncte; **Problema 4. a)** 3 puncte; **b)** 4 puncte.