MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI CĂLĂRAŞI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 24 IANUARIE 2009

Clasa a V-a

I. Se consideră şirul de numere naturale: 0, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175 , ... şi un al doilea şir, care are ca termeni numerele obținute efectuând suma cifrelor la fiecare din termenii primului şir: 0, 7, 5, 12, 1, 8, 6, 13, …

a) Să se scrie următorii cinci termeni ai primului şir şi următorii cinci termeni ai celui de-al doilea şir.
b) Să se determine al 2009-lea termen din primul şir.
c) Demonstrați că orice număr natural este termen al celui de-al doilea şir.

Relu Ciupea, Oltenița

II. a) Calculați $A=41\cdot 14+41\cdot 34+41$;
b) Cu ce număr putem înmulți numărul A pentru a obține un pătrat perfect? Justificați răspunsul dat.
c) Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care sunt divizibile cu 10, numărul a este pătrat perfect şi $a = b + c$.

Eugen Predoiu, Călăraşi

III. La 15 septembrie, un elev de clasa a V-a începe să numere, din unu în unu, până la un miliard. Să presupunem că în fiecare secundă spune un număr. Reuşeşte să termine de numărat până la sfârşitul clasei a V-a? Justificați răspunsul dat.

G.M. 5-6 /2008

IV. Într-un grup află un număr impar de copii care au vârsta de 11 ani sau de 12 ani. Dacă suma vârstelor copiilor din grup este de 200 ani, aflați câți copii au vârsta de 11 ani. Justificați răspunsul dat.

Sorin Furtună, Călăraşi şi Stelică Pană, Chirnogi

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI CĂLĂRAŞI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 24 IANUARIE 2009

Clasa a VI-a

I. a) Să se determine numerele naturale prime a, b, c ştiind că $a + b - c = 6$ şi $b + c = 78$.

Eugenia Vlad, Călăraşi

b) Arătați că un număr de şase cifre de forma $\overline{abaaba}$ este divizibil cu 1001.

G.M. 9 /2008

II. a) Stabiliți câte numere naturale cuprinse între 1000 si 2009, împărțite la 9 dau restul 8 şi împărțite la 8 dau restul 7.

Gheorghe Fianu, Ştefan cel Mare

b) Fie numerele $x, y, z \in \mathbf{N}$ astfel încât $17x + 14y = 3z$. Arătați că numărul $N =(x + y)(y + z)(z + x)$ se divide cu 102.

Luminița Bucureşteanu, Călăraşi

III. a) Care este măsura unghiului format de minutarul şi orarul unui ceas, atunci când acesta indică ora 4 fix?

b) Care este măsura unghiului format de minutarul şi orarul unui ceas atunci când acesta indică ora 4 şi 12 minute fix?

Sorin Furtună, Călăraşi

IV. a) Găsiți cel mai mic număr natural pătrat perfect divizibil cu 2009.

b) Scrieți numărul 2009 ca o sumă de două pătrate perfecte.

c) Aflați numerele prime $a, b \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a^2(a^2 - b^3) = 2009$.

Adriana Olaru şi Ştefan Florin Marcu, Călăraşi

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI CĂLĂRAŞI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 24 IANUARIE 2009

Clasa a VII-a

I. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu m(∠A) = 90° şi m(∠C) = 30°. Bisectoarea unghiului B intersectează latura [AC] în punctul D. Fie M mijlocul laturii [BC] şi E simetricul punctului D față de punctul M. Arătați că:

a) BDCE este romb ;

b) AC = 3AD ;

c) AM ⊥ CE.

Adriana Olaru, Călăraşi

II. a) Rezolvați în R ecuația $2[x] + 4 = 3x$ ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x).

b) Să se determine numărul prim $\overline{abc}$ ştiind că $[\sqrt{\overline{abc}}] = 10$ şi că suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este 10.

Georgeta Cioboată, Călăraşi

c) Fie ADCD un patrulater convex în care AB = a , BC = b, CD = c, DA = d şi în care relațiile $a+b-c \le d, b+c-d \le a, c+d-a \le b, d+a-b \le c$ sunt adevărate simultan. Determinați natura patrulaterului ABCD.

G.M. 10 /2008

III. a) Fie $x, y, z \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\dfrac{x\sqrt{2}+y}{y\sqrt{2}+z} \in Z$. Arătați că y este media geometrică a numerelor x şi z.

Aurelia Cațaros şi Adriana Constantin, Călăraşi

b) Rezolvați in Z×Z ecuația $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{3y}=-1$

Florica şi Lucian Ioniță, Călăraşi

IV. Fie ABCD un paralelogram în care măsura unghiului A este mai mică de 90° şi bisectoarea unghiului A intersectează latura (CD) în E.

a) Să se determine relația dintre a = AD şi b = AB astfel încât aria patrulaterului ABCE să fie de trei ori mai mare decât aria triunghiului ADE.

b) Perpendiculara în A pe AB şi perpendiculara în C pe BC se intersectează în M. Să se arate că MD ⊥ AC.

c) Notând cu N mijlocul segmentului (AD), arătați că dacă BF ⊥ CN, cu F∈CN, atunci triunghiul ABF este isoscel.

Aurelia Cațaros şi Adriana Constantin, Călăraşi

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI CĂLĂRAŞI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 24 IANUARIE 2009

Clasa a VIII-a

I. a) Fie numărul $S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2009}}$. Determinați numerele naturale consecutive a şi b astfel încât S $\in$ (a; b).

b) Să se calculeze produsul: $\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2009^3-1}{2009^3+1}$.

Adriana Olaru, Călăraşi

II. Fie paralelipipedul dreptunghic [ABCDA'B'C'D'], AB = a, BC = b, AA' = c şi *x* distanța de la punctul A la planul (BDA') .

a) Arătați că $x=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$;

b) Arătați că dacă $\frac{3}{x^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$, atunci paralelipipedul este cub.

Gheorghe Fianu, Ştefan cel Mare

III. a) Dacă $a,b\in(0,\infty), a\le b$ şi $x,y\in[a,b]$, arătați că $2\le\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Gheorghe Fianu, Ştefan cel Mare

b) Dacă ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri dreptunghice (A şi A_1 unghiuri drepte), arătați că
$BC\cdot B_1C_1 \ge AB\cdot A_1B_1 + AC\cdot A_1C_1$.

Cristina Bornea, Călăraşi

IV. Fie triunghiul echilateral ABC şi S un punct exterior planului (ABC) astfel încât [SA] ≡ [SB] ≡ [SC]. Dacă M este mijlocul segmentului [BC] şi măsura unghiului format de dreptele AC şi SM este de 60°, demonstrați că SA ⊥ SM.

G.M. 11/2008

SOLUȚII

Clasa a V-a

I. a) Se observă că primul şir este şirul multiplilor lui 25. Următorii cinci termeni vor fi :
200, 225, 250, 275, 300.
Următorii cinci termeni pentru al doilea şir vor fi: 2, 9, 7, 14, 3.

b) Vom scrie în primul şir mai mulți termeni decât cei găsiți până acum:

$$0, \underbrace{25, 50, 75, 100}_{\text{grupa 1}}, \underbrace{125, 150, 175, 200}_{\text{grupa 2}}, \underbrace{225, 250, 275, 300}_{\text{grupa 3}}, \underbrace{325, 350, 375, 400}_{\text{grupa 4}}, \underbrace{425, 450, 475, 500}_{\text{grupa 5}}, \ldots$$

Se observă că termenii primului şir, cu excepția lui 0, pot fi grupați în grupe de câte patru termeni, care au ultimele două cifre 25, 50, 75, 00.
Al patrulea termen de la fiecare grupă se termină în 00 şi numărul de sute de la acest termen este şi numărul grupei.
Deoarece $2009 = 4 \cdot 502 + 1$, rezultă că al 2009-lea termen din primul şir va fi al patrulea termen al grupei 502, adică 50200.

c) Fie n un număr natural. Dacă $n = 0$, atunci el este primul termen al şirului al doilea.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se observă că numărul de forma $\underbrace{111\ldots1}_{\text{n cifre}}00$, fiind multiplu de 100 este şi multiplu de 25, deci se află în primul şir $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte, suma cifrelor sale va fi $\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{n termeni}} = n$ $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Deci orice număr natural este termen al şirului al doilea.

Relu Ciupea, Oltenița

II.
a) $A = 41 \cdot 14 + 41 \cdot 34 + 41 = 41 \cdot (14 + 34 + 1) = 41 \cdot 49 = 2009$.
b) Fie k numărul cerut. $A \cdot k = 41 \cdot 7^2 \cdot k$.
Pentru $k = 41$, $A \cdot k = 41^2 \cdot 7^2$.
c) $\overline{abc} \vdots 10, \Rightarrow c = 0$
a este cifră nenulă şi pătrat perfect, deci $a \in \{1, 4, 9\}$.
$a = b + c$ şi $c = 0 \Rightarrow a = b$.
Soluții: 110, 440, 990.

Eugen Predoiu, Călăraşi

III.

1 minut = 60 secunde
1 oră = 3600 secunde
1 zi = $24\cdot3600 = 86400$ secunde
1 an = $365\cdot86400 = 31536000$ secunde sau $366\cdot86400 = 31622400$ secunde. Ambele numere sunt mai mici de 1000000000.
Presupunând că elevul ar fi numărat fără întrerupere, după un an nu ar ajunge la un miliard.

G.M. 5-6/2008

IV.

Notăm cu x numărul copiilor de 11 ani şi cu y numărul copiilor de 12 ani.
$11x + 12y = 200$
$11x = 200 – 12y$ = par iar 11 este impar, deci x este număr par. Deoarece x + y este impar, deducem că y este număr impar. Din $4/12y$ şi $4/200$ rezultă $4/11x$ şi, deoarece 11 nu e divizibil cu 4, deducem $4/x$.
Dacă $x = 4k$, $k \in N^*$,
$\Rightarrow 44k + 12y = 200$ /:4
$\Rightarrow 11k + 3y = 50$
$k = 1 \Rightarrow 3y = 39 \Rightarrow y = 13$ şi $x = 4$
$k = 2 \Rightarrow 3y = 28$; $y \notin N$
$k = 3 \Rightarrow 3y = 17$; $y \notin N$
$k = 4 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$; dar 2 nu este număr impar.
Aşadar sunt 4 copii de 11 ani.

Sorin Furtună, Călăraşi şi Stelică Pană, Chirnogi

Clasa a VI-a

I.

a) $b + c = 78$, deci b şi c au aceeaşi paritate.

Dacă numerele prime b şi c sunt pare, $b = c = 2$, $b + c = 4 \neq 78$; deducem că b şi c sunt impare, deci $b - c$ este par. Din $a + b - c = 6 \Rightarrow a = 6 - (b - c) =$ par; a este prim şi par, deci $a = 2$.

$b - c = 6 - a = 6 - 2 = 4$.

Din $b - c = 4$ şi $b + c = 78$ se obține $b = c + 4$; $\Rightarrow c + 4 + c = 78 \Rightarrow 2c = 74 \Rightarrow c = 37$ şi $b = 41$.

Eugenia Vlad, Călăraşi

b) $\overline{abaaba} = \overline{aba000} + \overline{aba} = \overline{aba} \cdot 1000 + \overline{aba} = \overline{aba} \cdot (1000+1) = \overline{aba} \cdot 1001$

Deci $\overline{abaaba} \vdots 1001$.

G.M. 9 /2008

II.

a) Fie n un număr care îndeplineşte condițiile problemei.

$$\begin{cases} n = 9c_1 + 8 \\ n = 8c_2 + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 1 = 9(c_1 + 1) \\ n + 1 = 8(c_2 + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n + 1) \vdots 9 \\ (n + 1) \vdots 8. \end{cases}$$

Dar $(8, 9) = 1$, deci $(n + 1) \vdots 72$.

$1000 < n < 2009 \Rightarrow 1001 < n + 1 < 2010$

$72 \cdot 13 < 1001$, $72 \cdot 14 = 1008$, $72 \cdot 28 > 2010$ şi $72 \cdot 27 = 1944$.

Rezultă că $n + 1 \in \{72 \cdot 14, 72 \cdot 15, ..., 72 \cdot 27\}$, $n \in \{72 \cdot 14 - 1, 72 \cdot 15 - 1, ..., 72 \cdot 27 - 1\}$.

Mulțimea $\{72 \cdot 14 - 1, 72 \cdot 15 - 1, ..., 72 \cdot 27 - 1\}$ are $27 - 13 = 14$ numere.

Gheorghe Fianu, Ştefan cel Mare

b)

$17x + 14y = 3z \Rightarrow 17x + 17y = 3y + 3z \Rightarrow 17(x + y) = 3(y + z) \Rightarrow 17(x + y) \vdots 3$ şi $3(y + z) \vdots 17$.

Din $17(x + y) \vdots 3$ şi $(3;17) = 1 \Rightarrow (x + y) \vdots 3 \Rightarrow (x + y) = 3a$, $a \in N$.

Din $3(y + z) \vdots 17$ şi $(3;17) = 1 \Rightarrow (y + z) \vdots 17 \Rightarrow (y + z) = 17b$, $b \in N$.

$17x + 14y = 3z \Rightarrow 20x + 14y = 3x + 3z \Rightarrow 2(10x + 7y) = 3(x + z) \Rightarrow 3(x + z) \vdots 2$.

Deoarece $(2;3) = 1 \Rightarrow (x + z) \vdots 2 \Rightarrow (x + z) = 2c$, $c \in N$.

$N = (x + y)(y + z)(z + x) = 3a \cdot 17b \cdot 2c = 102 \cdot abc$, deci $N \vdots 102$.

Luminița Bucureşteanu, Călăraşi

III.

a) În 12 ore, acul orar parcurge 360°, deci într-o oră se va deplasa cu 360°:12 = 30°. De la ora 0 la ora 4 sunt 4 ore, cărora le corespund $4\cdot30° = 120°$. Minutarul este în poziția 0 şi deci unghiul dintre orar şi minutar este de 120°.

b) 12 minute reprezintă o cincime dintr-o oră, deci de la ora 4 la ora 4 şi 12 minute, orarul mai parcurge încă 30°: 5 = 6°; în total, sunt 126°.

În 60 de minute, minutarul parcurge 360°, deci câte 6° pentru fiecare minut. În 12 minute descrie un unghi de $12\cdot6° = 72°$. Unghiul dintre orar şi minutar are măsura de 126° – 72° = 54°.

Sorin Furtună, Călăraşi

IV.

a) $2009 = 7^2\cdot41$

Cel mai mic număr natural pătrat perfect divizibil cu 2009 este $7^2\cdot41^2 = 82339$.

b) $2009 = 7^2\cdot41 = 7^2\cdot(4^2 + 5^2) = 7^2\cdot4^2 + 7^2\cdot5^2 = 28^2 + 35^2$.

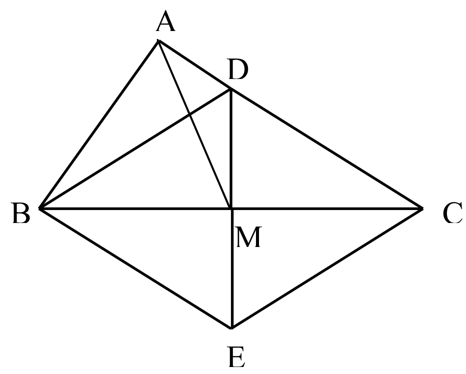
c) $a^2(a^2 – b^3) = 2009 = 7^2\cdot41$, deci produsul $7^2\cdot41$ este divizibil cu a^2.

Dar a este un număr prim iar 41 nu poate fi divizibil cu a^2. Obținem că $7^2 \vdots a^2$, deci $7 \vdots a$, de unde rezultă că a = 7. Înlocuind pe a cu 7, se obține $7^2(7^2 – b^3) = 7^2\cdot41$, $7^2 – b^3 = 41$, de unde b = 2.

Adriana Olaru şi Ştefan Florin Marcu, Călăraşi

Clasa a VII-a

I.



a) BM = MC şi DM = ME $\Rightarrow$ BDCE = paralelogram.
m($\angle$DBM) = m($\angle$DCM) = 30° $\Rightarrow$ ΔBDC = isoscel $\Rightarrow$ BD = CD, deci BDCE este romb.
b) ΔABD este dreptunghic şi m($\angle$ABD) = 30° $\Rightarrow$ BD = 2AD $\Rightarrow$ CD = 2AD $\Rightarrow$
AC = AD + CD = 3AD.
c) ΔABD $\equiv$ ΔMBD (IU) $\Rightarrow$ AB = BM $\Rightarrow$ ΔABM = isoscel; [BD este bisectoare $\Rightarrow$ BD $\perp$ AM.
BDCE este romb, deci BD || CE, de unde se obține CE $\perp$ AM.

Adriana Olaru, Călăraşi

II.

a) $2[x]+4=3x \Rightarrow 2[x]=3x-4 \Rightarrow [x]=\dfrac{3x-4}{2}$

$[x]\in Z$; notam $\dfrac{3x-4}{2}=k;\ k\in \mathrm{Z}$

$3x-4=2k \Rightarrow 3x=2k+4 \Rightarrow x=\dfrac{2k+4}{3}$

$\{x\}=x-[x]=\dfrac{2k+4}{3}-k=\dfrac{2k+4-3k}{3}=\dfrac{4-k}{3}$

$0\le\{x\}<1 \Rightarrow 0\le\dfrac{4-k}{3}<1 \Rightarrow 0\le 4-k<3 \Rightarrow k\in\{2;3;4\}$

$x_1=\dfrac{2\cdot 2+4}{3}=\dfrac{8}{3}$

$x_2=\dfrac{2\cdot 3+4}{3}=\dfrac{10}{3}$

$x_3=\dfrac{2\cdot 4+4}{3}=\dfrac{12}{3}=4.$

b) $\left[\sqrt{\overline{abc}}\right]=10 \Rightarrow \quad 10\le\sqrt{\overline{abc}}<11 \Rightarrow 100\le\overline{abc}<121$

Numerele prime cuprinse între 100 şi 121 sunt 101; 103; 107; 109; 113.

Numarul 109 are suma cifrelor 10.

Georgeta Cioboată, Călăraşi

c)

$a+b-c\le d \quad (1)$

$b+c-d\le a \quad (2)$

$c+d-a\le b \quad (3)$

$d+a-b\le c \quad (4)$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Din } (1)+(2)\Rightarrow a+2b-d\le a+d\Rightarrow 2b\le 2d\Rightarrow b\le d\\ \text{Din } (3)+(4)\Rightarrow c-b+2d\le b+c\Rightarrow 2d\le 2b\Rightarrow d\le b\end{array}\right\}\Rightarrow b=d\\ \left.\begin{array}{l}\text{Din } (1)+(4)\Rightarrow 2a-c+d\le c+d\Rightarrow 2a\le 2c\Rightarrow a\le c\\ \text{Din } (2)+(3)\Rightarrow b+2c-a\le a+b\Rightarrow 2c\le 2a\Rightarrow c\le a\end{array}\right\}\Rightarrow a=c\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ABCD paralelogram.}$$

G.M. 10/2008

III. a) **Soluție:**

Notăm $\dfrac{x\sqrt{2}+y}{y\sqrt{2}+z}=k$, $k\in \mathbf{Z}$

$x\sqrt{2}+y=k\left(y\sqrt{2}+z\right)$

$x\sqrt{2}+y=ky\sqrt{2}+kz$

$x\sqrt{2}-ky\sqrt{2}=kz-y$

$\sqrt{2}\left(x-ky\right)=kz-y.$

Egalitatea are loc $\Leftrightarrow x-ky=kz-y=0$

$x-ky=0\Rightarrow x=ky\Rightarrow \dfrac{x}{y}=k$ (1)

$kz-y=0\Rightarrow kz=y\Rightarrow \dfrac{y}{z}=k$ (2)

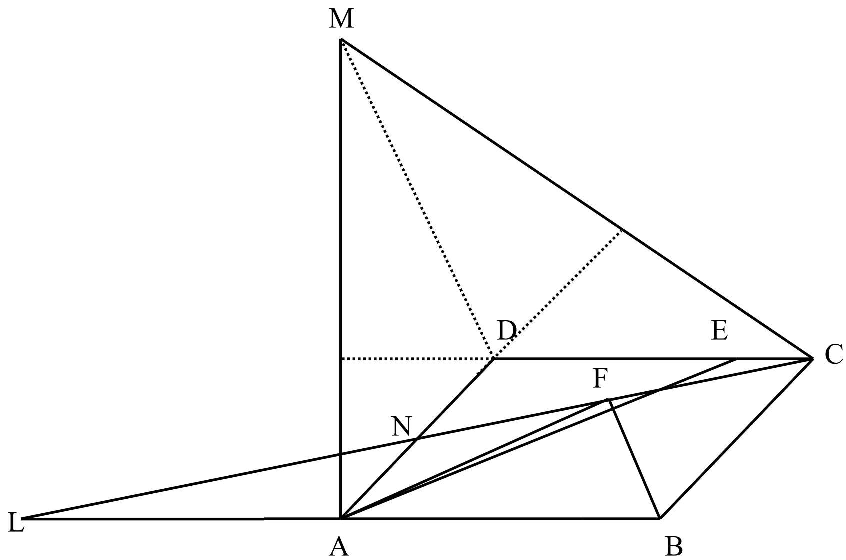
Din (1) si (2) $\Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}\Rightarrow y=\sqrt{xz}$

Aurelia Cațaros şi Adriana Constantin, Călăraşi

b) Punem condițiile $x\neq 0$ şi $z\neq 0$.
Se aduce la acelaşi numitor şi se obține:
$6y + 5x + 3xy = 0 \Rightarrow 3xy + 6y + 5x + 10 = 10 \Rightarrow 3y(x + 2) + 5(x + 2) = 10 \Rightarrow (3y + 5)(x + 2) = 10$
$(3y + 5)\in \{\pm1, \pm2, \pm 5, \pm10\}$ şi $(x + 2)\in \{\pm1, \pm2, \pm 5, \pm10\}$.
Soluții: (–12; –2), (3; –1), (–3; –5).

Florica şi Lucian Ioniță, Călăraşi

IV.



a) Δ ADE este isoscel $\Rightarrow$ DE = DA = a $\Rightarrow$ EC = $b-a$.
Fie h = d(A; DE) = d(A; EC).
ABCE – trapez $\Rightarrow$ $A=\frac{(\mathrm{AB}+\mathrm{EC})h}{2}=\frac{(2b-a)h}{2}$ –
ADE – triunghi $\Rightarrow$ $A=\frac{\mathrm{DE}\cdot h}{2}=\frac{ah}{2}$
$\frac{(2b-a)h}{2}=3\cdot\frac{ah}{2}\Rightarrow 2b-a=3a\Rightarrow b=2a.$
b) MC $\perp$ BC şi BC $\parallel$ AD $\Rightarrow$ AD $\perp$ MC
MA $\perp$ AB şi AB $\parallel$ CD $\Rightarrow$ CD $\perp$ MA
$\Rightarrow$ D este ortocentru în ΔMAC $\Rightarrow$ MD $\perp$ AC.
c) Notăm NC $\cap$ AB = $\{$L$\}$.
ΔANL $\equiv$ ΔDNC (ULU) $\Rightarrow$ LA = CD = AB = b,
[AF] este mediană în triunghiul dreptunghic LFB $\Rightarrow$ $\mathrm{AF}=\frac{\mathrm{LB}}{2}=b$, deci triunghiul ABF este isoscel.

Aurelia Cațaros şi Adriana Constantin, Călăraşi

Clasa a VIII-a

I. a)

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2007}}+\frac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2009}}=$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\ldots+\frac{\sqrt{2007}-\sqrt{2005}}{2}+\frac{\sqrt{2009}-\sqrt{2007}}{2}=$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{2007}-\sqrt{2005}+\sqrt{2009}-\sqrt{2007}}{2}=\frac{\sqrt{2009}-1}{2}.$$

$$44^2<2009<45^2 \Rightarrow 44<\sqrt{2009}<45 \Rightarrow 43<\sqrt{2009}-1<44 \Rightarrow \frac{42}{2}<\frac{43}{2}<\frac{\sqrt{2009}-1}{2}<\frac{44}{2} \Rightarrow 21<\frac{\sqrt{2009}-1}{2}<22.$$

$S\in(21;22)$, deci $a=21$, $b=22$.

b) Se observă că: $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k(k+1)+1}{k(k-1)+1}, (\forall) k\in \mathbf{N}^*$

Dăm lui k valorile 2, 3, 4,…, 2008, 2009. Se obțin următoarele 2008 relații:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}=\frac{2-1}{2+1}\cdot\frac{2\cdot3+1}{2\cdot1+1}$$

$$\frac{3^3-1}{3^3+1}=\frac{3-1}{3+1}\cdot\frac{3\cdot4+1}{3\cdot2+1}$$

$$\frac{4^3-1}{4^3+1}=\frac{4-1}{4+1}\cdot\frac{4\cdot5+1}{4\cdot3+1}$$

$\vdots$

$$\frac{2008^3-1}{2008^3+1}=\frac{2008-1}{2008+1}\cdot\frac{2008\cdot2009+1}{2008\cdot2007+1}$$

$$\frac{2009^3-1}{2009^3+1}=\frac{2009-1}{2009+1}\cdot\frac{2009\cdot2010+1}{2009\cdot2008+1}$$

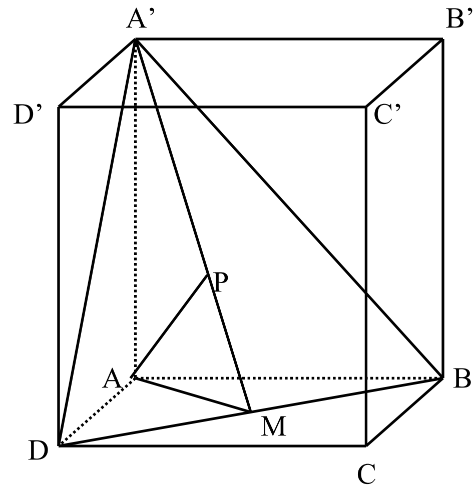
Înmulțind aceste relații, obținem:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2008^3-1}{2008^3+1}\cdot\frac{2009^3-1}{2009^3+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2009}\cdot\frac{2008}{2010}\cdot$$

$$\frac{2\cdot3+1}{2\cdot1+1}\cdot\frac{3\cdot4+1}{3\cdot2+1}\cdot\frac{4\cdot5+1}{4\cdot3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2008\cdot2009+1}{2008\cdot2007+1}\cdot\frac{2009\cdot2010+1}{2009\cdot2008+1}=\frac{1\cdot2}{2009\cdot2010}\cdot\frac{2009\cdot2010+1}{2\cdot1+1}=\frac{2009\cdot2010+1}{3\cdot1005\cdot2009}$$

Adriana Olaru , Călăraşi

II.



a)

$$\left.\begin{array}{l} A'A \perp (ABC) \\ AM \perp BD, \\ AM,\ BD \subset (ABC) \end{array}\right\} \text{ cf. T3p} \Rightarrow A'M \perp BD$$

Construim AP $\perp$ A'M. Avem BD $\perp$ AM şi BD $\perp$ A’M, deci BD $\perp$ (A'AM), de unde rezultă BD $\perp$ AP.
Din AP $\perp$ BD şi AP $\perp$ A'M rezultă AP $\perp$ (A'BD), deci d $\left(A; (A'BD)\right)$ = AP = x.

$$x = \mathrm{AP} = \frac{\mathrm{AA'} \cdot \mathrm{AM}}{\mathrm{A'M}} = \frac{c \cdot \dfrac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{c^2 + \left(\dfrac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}} = \frac{c \cdot \dfrac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}};$$

b)

$$\frac{3}{x^2} = \frac{3}{\left(\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\right)^2} = \frac{3\cdot\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}{a^2b^2c^2} = 3\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\frac{3}{x^2} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \Leftrightarrow 3\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{a^2}+\frac{3}{b^2}+\frac{3}{c^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{2}{bc}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{ca}+\frac{1}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{1}{b}-\frac{1}{c} = \frac{1}{c}-\frac{1}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \text{ABCDA'B'C'D' este cub.}$$

Gheorghe Fianu, Ştefan cel Mare

III.

a)

$x \geq a > 0,\ y \geq a > 0.$

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 2 \leq \frac{x^2+y^2}{xy} \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\ (1)$$

$$\begin{cases} x \leq b \\ y \geq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax \leq ab \\ -by \leq -ab \end{cases} \Rightarrow (ax - by) \leq 0\ ; \quad (2)$$

$$\begin{cases} x \geq a \\ y \leq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bx \geq ab \\ -ay \geq -ab \end{cases} \Rightarrow (bx - ay) \geq 0\ ; \quad (3)$$

Din (2) si (3) $\Rightarrow (ax-by)\cdot(bx-ay) \leq 0$

$$(ax-by)\cdot(bx-ay) \leq 0 \Leftrightarrow ab\left(x^2+y^2\right) \leq xy\left(a^2+b^2\right) \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \leq \frac{a^2+b^2}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\ (4)$$

Din (1) si (4) rezulta inegalitatea ceruta.

Gheorghe Fianu, Ştefan cel Mare

b)

Fie $\mathrm{AB} = x,\ \mathrm{AC} = y,\ \mathrm{A_1B_1} = a,\ \mathrm{A_1C_1} = b$

$\mathrm{BC} \cdot \mathrm{B_1C_1} = \sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)}$

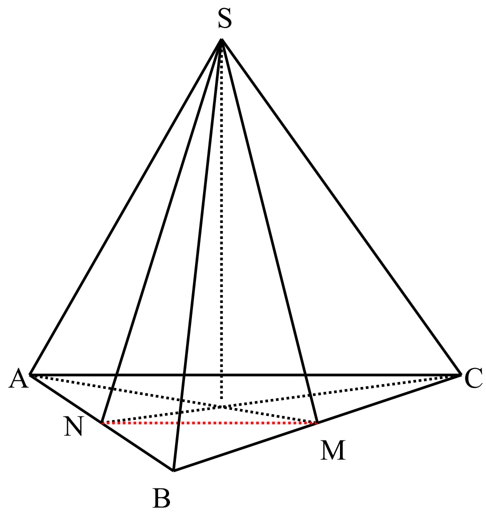
$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{A_1B_1} + \mathrm{AC} \cdot \mathrm{A_1C_1} = ax + by$

$$\mathrm{BC} \cdot \mathrm{B_1C_1} \geq \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A_1B_1} + \mathrm{AC} \cdot \mathrm{A_1C_1} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)} \geq ax+by \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right) \geq (ax+by)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 + \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \Leftrightarrow b^2x^2 - 2bxay + a^2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (bx-ay)^2 \geq 0.$$

Cristina Bornea, Călăraşi

IV.



SABC este piramidă regulată.
MN este linie mijlocie în ΔABC $\Rightarrow$ MN || AC.
SM şi SN sunt apoteme ale piramidei, deci SM = SN.
$\supseteq$(SM, AC) = $\supseteq$(SM, MN) = $\supseteq$SMN.
ΔSMN este isoscel şi m($\supseteq$SMN) = 60°, deci ΔSMN este echilateral.
Notăm SM = SN = MN = a. AB = BC = AC = 2a.

AM este înălțime în triunghiul echilateral ABC $\Rightarrow$ $\text{AM} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

În triunghiul dreptunghic SMC, SM = MC = a $\Rightarrow$ $\text{SC} = a\sqrt{2} \Rightarrow \text{SA} = \text{SB} = \text{SC} = a\sqrt{2}$

$\text{SM}^2 + \text{SA}^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3a^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 = \text{AM}^2$.

Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, ΔSAM este dreptunghic, deci SA $\perp$ SM.

G.M. 11/2008