Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011

CLASA a VIII-a

Problema 1. a) Demonstraţi că $3a^2 - 2a + 3 \geq \frac{8}{3}$, pentru orice număr real a.

b) Determinaţi numerele reale x şi y cu proprietatea că

$$(x^2 - x + 1)(3y^2 - 2y + 3) - 2 = 0.$$

Problema 2. a) Arătaţi că numărul $m^2 - m + 1$ aparţine mulţimii $\{n^2 + n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, oricare ar fi m număr natural nenul.

b) Fie p un pătrat perfect, $p > 1$. Demonstraţi că există numerele naturale nenule r şi q astfel încât $p^2 + p + 1 = (r^2 + r + 1)(q^2 + q + 1)$.

Problema 3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale. Un plan α ce conţine punctul A intersectează semidreptele $(BB'$ şi $(CC'$ în punctele E şi F astfel încât $\text{aria}\,\Delta ABE + \text{aria}\,\Delta ACF = \text{aria}\,\Delta AEF$. Determinaţi măsura unghiului format de planul (AEF) cu planul (BCC').

Problema 4. Determinaţi numerele naturale m pentru care

$$\{\sqrt{m}\} = \{\sqrt{m + 2011}\}.$$

Notă. $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.