

Probleme de concurs

1. Dacă  $m, n \in \mathbf{Z}^*$ , să se demonstreze că mulțimea  $A = \left\{ \frac{m+n}{3}, \frac{m-n}{3}, \frac{m}{3}, \frac{n}{3} \right\}$  are cel puțin un element în  $\mathbf{Z}$ .
2. Dacă  $\frac{a+b}{c+d} + \frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c-d} + \frac{a-b}{c+d}$ , calculați produsul  $abcd$ .
3. a) Verificați dacă  $\frac{1}{1 \cdot 7} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{7} \right)$   
b) Comparați numerele  $a$  și  $b$   
$$a = \left( \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{115 \cdot 121} \right)$$
  
$$b = \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{6}{8} + \frac{7}{12} + \dots + \frac{505}{2004} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{501} \right) \right] : 5^3$$
4. Arătați că  $\frac{101}{102} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{101^2} < \frac{201}{102}$
5. Fie ABCD patrulater convex cu E mijlocul lui [AB] și F mijlocul lui [BC], M mijlocul lui [DE], N mijlocul lui [DF], P mijlocul lui [CE], Q mijlocul lui [AF]. Să se demonstreze că MNPQ este paralelogram.
6. Arătați că picioarele a două înălțimi ale unui triunghi și mijlocul celei de-a treia laturi sunt vârful unui triunghi isoscel. Cercetați dacă acest triunghi poate fi echilateral și în ce condiții.
7. Se dă un triunghi isoscel ABC cu  $m(\angle A) = 120^\circ$ . Fie M mijlocul laturii [AB]. Perpendiculara din M pe BC intersectează dreapta AC în D, iar bisectoarea unghiului  $\angle CDM$  intersectează latura [BC] în E. Să se arate că:  
a)  $CD = 3 AD$   
b)  $BD \perp DC$   
c)  $[EB] \equiv [EC]$   
d)  $EM \parallel AC$ .
8. Se dă dreptunghiul ABCD cu  $AB = 2BC = 2a$ . Fie punctele  $E \in CD$  și  $F \in CD$  astfel încât  $m(\angle DAF) = m(\angle BAE) = 30^\circ$ . Perpendiculara din F pe AE intersectează pe AE în punctul M și pe AB în punctul N. Demonstrați că:  
a) Triunghiul AFN este echilateral  
b) Triunghiul ADM este echilateral  
c) Patrulaterul AFEN este romb.
9. În  $\triangle ABC$ ,  $m(\angle A) = 90^\circ$ ,  $AC > AB$ , E, F, H sunt mijloacele segmentelor [BC], [AC], [AB] și  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ .  
a) Demonstrați că DEFH este trapez isoscel  
b) Dacă  $BC = 12$  cm și  $m, m(\angle ABC) = 60^\circ$ , calculați perimetrul trapezului DEFH.