Centrul de Excelenţă
Clasa a VII –a

Patrulatere. Coliniaritate. Concurenţă

1. Demonstraţi că medianele unui triunghi oarecare sunt concurente într-un punct G (centru de greutate) situat pe fiecare mediană la o treime de bază şi două treimi de vârf.

2. Fie ABCD un paralelogram cu M, N, P şi Q mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD] respectiv [AD]. Dacă $BQ \cap DM = \{R\}$ şi $BP \cap DN = \{S\}$, arătaţi că:
   a) RBSD este paralelogram
   b) A, R, S, C sunt coliniare
   c) $[AR] \equiv [RS] \equiv [SC]$
   d) MP, BD, RS sunt concurente.

3. Fie ABCD un paralelogram (AB > BC), $M \in (AB)$, $N \in (DC)$, astfel încât $MB = DN = BC$, $BR \perp MC$, $DP \perp AN$, $R \in (MC)$, $P \in (AN)$. Arătaţi că:
   a) Mijloacele laturilor (BC) şi (AD) şi punctele P şi R sunt coliniare;
   b) MN, PR şi BD sunt drepte concurente.

4. Fie ABCD un patrulater convex cu M şi N mijloacele laturilor [AB], respectiv [BC]. Dacă DM şi DN intersectează diagonala [AC] în R, respectiv S astfel încât $[AR] \equiv [RS] \equiv [SC]$, demonstraţi că ABCD este paralelogram.

5. Fie ABCD un patrulater convex, O punctul de intersecţie a diagonalelor iar M şi N mijloacele laturilor [DC], respectiv [BC]. Să se arate ca O este centrul de greutate al triunghiului AMN dacă şi numai dacă ABCD este paralelogram.

6. În triunghiul ABC se ştie că : $m(\angle A)=90^{\circ}$, $AM \perp BC$, $M \in BC$, iar N un punct pe (AM). Paralela prin N la AB intersectează dreapta BC în P. Perpendiculara în N pe NC intersectează dreapta AB în Q. Demonstraţi că [AN] şi [PQ] au acelaşi mijloc.

7. Se dau două triunghiuri dreptunghice isoscele ABC şi ADE cu $m(\angle BAC) = m(\angle DAE)$ care nu au puncte interioare comune. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor [BC], [CD], [DE] şi [BE]. Arătaţi că:
   a) $2MP \leq BC + DE$
   b) MNPQ este pătrat sau paralelogram.

8. Fie O un punct în planul triunghiului ABC şi A’, B’, C’ simetricele punctului O faţă de mijloacele laturilor [BC], [AC] şi [AC]. Să se demonstreze că dreptele AA’, BB’ şi CC’ sunt concurente.

9. În triunghiul ABC cu $m(\angle BAC) = 3m(\angle ABC)$, mediatoarea laturii [AB] intersectează latura [BC] în punctul E, iar bisectoarea unghiului $\angle ACB$ în punctul M. Ştiind că patrulaterul AEBM este romb, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

10. Se dă pătratul ABCD şi M un punct pe mediatoarea laturii [AB] astfel încât $\angle CMB \equiv \angle MCB$. Arătaţi că triunghiul ΔMAB este echilateral.