Inspectoratul Şcolar Judeţean Călăraşi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Concursul de matematică şi literatură Dan Barbilian – Ion Barbu

PROBA TIP O.I.M.

Călăraşi, 25 octombrie 2008

Subiectul 1. Fie x, y, z, t patru numere reale pozitive. Arătaţi că

$$\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{xt}+\sqrt{yz}+\sqrt{yt}+\sqrt{zt}\geq 3\sqrt[3]{xyz+xyt+xzt+yzt}.$$

Subiectul 2. Într-un triunghi ascuţitunghic ABC considerăm mijlocul A_1 al laturii BC, cercurile de centre A, A_1 şi raze BC, respectiv AA_1, şi coarda lor comună $A'A''$. Definim analog dreptele $B'B''$ şi $C'C''$. Demonstraţi că dreptele $A'A''$, $B'B''$ şi $C'C''$ sunt concurente.

Subiectul 3. Pe un semicerc de centru O şi rază 1 considerăm punctele A_1, A_2, $\cdots$, A_{2n}, unde $n\in\mathbb{N}^*$. Lungimea proiecţiei vectorului

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{2n}}$$

pe dreapta suport a diametrului semicercului este un număr întreg impar. Arătaţi că lungimea proiecţiei lui $\overrightarrow{v}$ pe mediatoarea diametrului este mai mare sau egală cu 1.

Subiectul 4. Fiind dat un număr întreg $n\geq 2$, aflaţi numărul maxim de segmente de lungime strict mai mare decât 1, determinate de n puncte situate într-un disc închis dat de rază 1.

Timp de lucru: 4 ore